NAIST (情報科) 入試過去問題集(数学) :最終版

以下の 3 題中，2 問選択して解答せよ．括弧内は「入学試験の年度」を示す．

問題閲覧時間は 10 分 (英語を受験する場合を含む)，発表時間は 8 分 (英語を受験する場合は 12 分)．問題閲覧中のみ，メモ用紙の使用可．

1. 線形代数

(1) 線形空間 V の任意のベクトルを x，定数ベクトルを a とする．
このとき，x を $x+a$ に移す V の写像 f が線形写像でないことを示せ．(試問例)

(2) 次の 4 行 4 列の行列 (略) の逆行列を求めよ．(2004 第 1 回)

(3) $X^n = 0$ となる正方行列 X について，$(E-X)^{-1} =$(以下略) (2007 第 1 回)

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

とする．
A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(5) 行列 A について，

$$A \neq 0, A^2 = 0, Ax = 0$$

とする．

A. A と x が独立であることを証明せよ．

B. $B =$(略) とき，$B^{-1}AB$ を展開せよ．(2008 第 1 回)

(6)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする

A. $AN = NA$ を示せ．

B. N^2, N^3 を求めよ．

C. $(A+N)^k$ を求めよ．(2008 第 1 回)

(7)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする．

A. A の固有ベクトルを求めよ．

B. A を対角化せよ．

C. A^n を求めよ． (2008 第 1 回)

(8)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$$

を求めよ．

(9)

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

とする．

A. A^{-1} を求めよ．

B. $A^{-1} = \alpha A + \beta E$ となる，α, β を求めよ．

(10) 3 つのベクトル，$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．

A. a, b, c が互いに直交していることを示せ．

B. a, b, c の正規直交基底を求めよ．

C. a, b, c の全てに直交するベクトルを 1 つ求めよ． (試問例)

(11) n 行 n 列の行列 A について， ${}^tA = A$ で，$A^2 = A$ のとき，固有値は 0 か 1 になることを示せ． (出題年度不明，および 2010 第 1 回)

(12) A. n 次正方行列 A について，$A^k = E$ となる自然数 k が存在するとき，A は正則であることを示せ．

B. $A^2 = E$ のときの固有値を求めよ． (2009 第 1 回)

(13)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

A. $A^2 - (2a + b)E = O$ を満たす a, b を求めよ．

B. $E + A + A^2 + \cdots + A^n$ の値を求めよ． (2009 第 1 回)

(14) A. 2×2 行列 A・B について，$A^{-1}BA$ を計算せよ．
(A は B の固有ベクトルを束ねた行列，典型的な正則行列を用いた対角化)

B. B^n を計算せよ． (2010 第 1 回)

(15)

$$W = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad W^2 + W + E = 0$$

のとき

A. a, b を求めよ．

B. W^3 を求めよ．また $W^{100}+W^{50}$ を求めよ． (2010 第 1 回)

(16) 4 点，$A(2,1,0), B(1,1,1), C(-1,1,1), D(0,2,1)$ からなる四面体について答えよ．

A. $\triangle ABC$ の面積.

B. $\triangle ABC$ に点 D から降りる垂線.

C. 四面体 ABCD の体積. (2010 第 1 回)

(17) 正方行列 A, B について，

$$\frac{d}{dt}AB = \left(\frac{d}{dt}A\right)B + A\left(\frac{d}{dt}\right)B$$

を示せ． (2011 第 1 回)

(18)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

を求めよ． (2011 第 1 回)

(19)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

について,T^n を求めよ．

但し, 行列 A と B が $AB = BA$ を満たすとき二項定理 $(A+B)^n = nCk \cdot A^k \cdot B^{n-k}$ が成り立つことを用いてもよい． (2011 第 2 回)

(20)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．

A. x_1 と x_2 のなす角を求めよ．

B. x_1 と x_2 に直交するベクトルを 1 つ求めよ．(2012 第 1 回 3 日目)

(21)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

A. x_1 と x_2 に直交するベクトル x_3 を求めよ．

B. x_1, x_2, x_3 の線形結合によって $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を表現せよ (2012 第 1 回 4 日目)

(22) 正方行列 A, B がある時，$AB - BA = E$ が成り立たないことを，トレース（対角成分の和）に注目して証明せよ．(2012 第 1 回 4 日目)

2. **解析学**

(1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

を求めよ．(試問例)

(2)

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

を求めよ．(2003 第 2 回)

(3)

$$\Gamma(n) = \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

において $\Gamma(0)$ と $\Gamma(1)$ を求め，それを元に

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

を証明せよ．(2004 第 1 回)

(4) $P(x, y)$ と原点の距離を F，$x = 3$ との距離を H とする．$\frac{H}{F} = 2$ のとき，P の軌跡を求めよ．(2007 第 1 回)

(5)

$$f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

とする．$f(x)$ が周期 π の周期関数であることを示し，グラフを描け．(2008 第 1 回)

(6) 等速直線運動している車が $-50[m/s^2]$ で減速した場合に停止するまでの移動距離を求めよ．(2008 第 1 回)

(7)

$$\int x^n \log x dx$$

を求めよ．(2008 第 1 回)

(8)

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx$$

を $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ とおいて，求めよ．

(9)

$$\int \sin(\log x)dx$$

を求めよ．$t = \log x$ とする．

(10) $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ のとき，

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

の軌跡を求めよ．

(11)

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx} - 3f(x) = 0$$

の解で，$f(0) = 0$，$f'(0) = 4$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．(試問例)

(12) $f(x)$ =(略) (定数 a を含んだ 3 次式)，$g(x)$ =(略) (定数 a を含んだ 2 次式) とする．

A. 2 曲線の交点を全て求めよ．

B. 2 曲線が囲んで出来る 2 つの領域の面積が等しいとき，a の値を求めよ． (2009 第 1 回)

(13)

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2\frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$$

の解で，$f(0) = 0$，$f'(0) = 2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．(2010 第 1 回)

(14) A. y の x に関する二次関数 $f(x)$ =(略) と，x の y に関する二次関数 $g(y)$ =(略) の交点を求めよ．

B. 二曲線 $f(x)$ と $g(y)$ で囲まれる面積を求めよ． (2010 第 1 回)

(15)

$$\int e^x \sin(x)dx$$

を求めよ．(2010 第 1 回)

(16) $y = x^3$ 上の点 $A(a, a^3)$ の接線と x 軸との交点を求めよ．(2010 第 1 回)

(17)

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx$$

を求めよ．(2010 第 2 回)

(18)

$$\int (\log x)^2 dx$$

を求めよ．(2010 第 3 回)

(19)

$$(\log_3(3x))^2 - 6\log_3(x) + 2$$

の最小値とそのときの x を求めよ．(2011 第 1 回)

(20)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2 \cos\theta d\theta$$

を求めよ．(2011 第 1 回)

(21)

$$y = xe^{-x}$$

を図示せよ．(2011 第 1 回)

(22)

$$xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

のとき,y を x を用いて表せ．(2011 第 2 回)

(23) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ について,

A. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を証明せよ.

B. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することを示せ．(2012 第 1 回 3 日目)

(24)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

を求めよ．(2012 第 1 回 4 日目)

(25)

$$\int x\left(x^2+1\right)^k dx$$

を求めよ．(2011 第 1 回 1 日目)

(26) 次の微分方程式を解け.

$$xy' \log x = xy$$

(2011 第 1 回 4 日目)

(27)

$$f(x) = \int (2x+1)^{n+1} dx$$

のとき

A. $t = 2x + 1$ とおいて，$\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

B. 不定積分せよ．(2011 第 1 回 3 日目)

(28) 次の微分方程式を解け.

$$xy' \log x = y \log y$$

(2011 第 1 回 4 日目)

(29) A. $\sin x$ をマクローリン展開せよ

B. (略)

(2011)

(30)

$$\int e^a x \cos(bx) dx$$

を求めよ．(2011)

3. **確率**

(1) N,A,I,S,T の 5 文字を全て使って単語を作成し辞書順に並べる.
"NAIST"は何番目に現れるか答えよ．(試問例)

(2) S,C,I,E,N,C,E の 7 文字について,

A. 並べ替えて何通りの文字列が作れるか

B. C が連続するのは何通りか.

C. 文字が連続しないのは何通りか．(2007 第 1 回)

(3) さいころを 3 回ふった時に，1 回目のさいころの目を a，2 回目のさいころの目を b，3 回目のさいころの目を c としたとき，$a > b > c$ となる確率を求めよ．(2004 第 1 回)

(4)

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i + j)$$

のとき，$f(2, 3)$ を求め $f(n, m)$ を公式化せよ．(2007 第 1 回)

(5) 赤玉が 1 つ，青玉が 2 つ，白玉が 4 つ入っている袋と，当たりくじが 3 本とはずれくじが 5 本入った箱がある.
袋から玉を一つ選び出したとき，赤玉なら 1 本，青玉なら 2 本，白玉なら 3 本くじを引く.
当たりくじを引く確率はいくらか．(2008 第 1 回)

(6) $1100, 1010, 1001, 1122, \cdots$ のような数字を 2 つ 2 種類ずつで構成された 4 桁の値について考えられる組み合わせは何通りか述べよ．(2008 第 1 回)

(7) A. 5 人がじゃんけんをして，あいこにならず勝負がつくときの確率を求めよ.

B. 同じ条件で，一人がグーを出して 3 人勝つときの確率を求めよ．(2008 第 1 回)

(8) A. サイコロを 2 回ふったときの，素数の出る確率を求めよ.

B. 素数なら「その数字× 1 万」，素数でないなら「その数字× 100」の点数を与えるとき，期待値を求めよ．(2008 第 1 回)

(9) 事象 X が確率 p で起こるとき，n 回試行したうち，k 回事象 X が起こった状態を考える.

A. 確率密度関数 (確率質量関数)$f(x)$ を求めよ.

B. この期待値を求めよ.

(10)
$$(x+y+z)^3$$
を展開したときの項の数を求めよ. (2003 第 2 回)

(11)
$$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^9$$
の定数項の係数を求めよ.

(12) 3 桁の整数について，次の問に答えよ.

A. 0 または 1 が，ただ 1 つだけ含まれる数はいくつあるか.

B. 0 または 1 が，少なくとも 1 つ含まれる数はいくつあるか.

(13) 4 つのサイコロを同時に投げるとき，出た目の最大値が 5 となる確率を求めよ. (試問例)

(14) 3 次元空間上に，番号 1〜10 の無限長の直線があり，次の条件を満たす.

- 番号 1〜3 の直線は互いに平行である.
- 番号 4〜6 の直線は互いに平行である.
- 番号 7〜10 の直線は，どの 2 本の直線についても平行でない
- 番号 1 と番号 4 の直線は，平行ではない.
- 番号 1 の直線は，番号 7〜10 のいづれの直線に対しても平行でない.
- 番号 4 の直線は，番号 7〜10 のいづれの直線に対しても平行でない.

このとき，無作為に 3 本の直線を選んだとき，三角形の領域ができる確率を求めよ. (2009 第 1 回)

(15) A. $(x+y+z)^n$ のとき，$x^py^qz^r$ の係数を求めよ.

B. $(x^2+x+\frac{1}{x})^7$ のとき，x の係数を求めよ. (2010 第 1 回)

(16) サイコロを 3 つ同時に投げたとき，次の問に答えよ.

A. 1 種類の目のみが出る確率を求めよ.

B. 3 種類の目のみが出る確率を求めよ.

C. 2 種類の目のみが出る確率を求めよ. (2010 第 1 回)

(17) 1 から n までの数の中から 6 つ選び，それぞれに 1 から n までの番号をランダムに割り当てる. このとき，$(n-2)$ 個の数が，割り当てられた番号と一致する確率を求めよ. (2010 第 1 回)

(18) 100 個のチップから無造作に 20 個のチップを選んで, ボードを組み立てる. 100 個中 5 個のチップが故障している場合を考える.

A. 組み立てたボードに, 故障したチップが 1 つも含まれない確率を求めよ.

B. 組み立てたボードに含まれている故障チップが 2 個までなら, ボードは正常に動作するらしい. ボードが正常に動作する確率を求めよ. (2010 第 1 回)

(19) 3 つのサイコロを同時に投げて，出た目を x, y, z とする．
 A. $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ となる確率を求めよ．
 B. $x^2+y^2+z^2 \leq 13$ となる確率を求めよ． (2010 第 2 回)

(20) A. 2 個のさいころを振り，その積が 3 の倍数ではない確率を求めよ．
 B. n 個のさいころを振り，その積が 3 の倍数である確率を求めよ．
 C. n 個のさいころを振り，その積が 4 の倍数である確率を求めよ． (2010 第 3 回)

(21) 赤, 青, 白の玉をそれぞれ 3,2,3 個並べる．同じ色の玉は区別しないとする．
 A. 赤玉 3 個が連続する場合，並び方は何通りか
 B. 4 個目までに青玉が 2 個並ぶ時の並べ方は何通りか
 (2011 第 1 回)

(22) さいころを 3 回振る．それぞれの結果を a, b, c とすると，全ての目が偶数なら $x = a+b+c$, それ以外なら $x = a \times b \times c$ とする．
 A. $x = 18$ となる確率を求めよ．
 B. $x = 12$ となる確率を求めよ．
 C. 少なくとも 4 の目が 1 回出て，$x = 12$ となる確率を求めよ．
 (2011 第 1 回)

(23) 正六面体のサイコロを振る. この時, 出目の確率は等しい. n 回振ったサイコロの目の積を X とする. 以下の問に答えよ.
 A. X が 3 の倍数である確率を求めよ.
 B. X が 6 の倍数である確率を求めよ.
 (2011 第 2 回)

(24) 0 から 9 までの目が等確率で出るルーレットがある．0 が 2 回出れば終了する．
 A. 最短で終了する確率を求めよ．
 B. 5 回目で終了する確率を求めよ．(2012 第 1 回 3 日目)

(25) 1 から 5 まで書かれているカードがある．これらのカードを使って 3 桁の数字を作る．同じカードは何回使っても良いとする．
 A. 何種類の数字を作ることができるか.
 B. 偶数の数字は何通り作ることができるか.
 C. 6 の倍数の数字は何通り作ることができるか．(2012 第 1 回 4 日目)

(26) 赤玉 3 つ白玉 2 つが入っている袋 A と赤玉 4 つ白玉 1 つ入っている袋 B がある．袋から玉を 1 つ取り出して，もう一方の袋に移す作業を A,B 交互に繰り返す．
 A. はじめに A から玉を取り出すとした時、B の袋から 1 回目に取り出す玉の色が白である確率を求めよ．
 B. 袋の玉の色が一色になった時点で作業を終了する．合計 4 回作業を行う中で作業が終了する確率を求めよ。(2011 第 1 回 1 日目)

(27) 工場で工程 A，工程 B そして検査 C を経る製品がある．工程 A で製造に失敗する確率は p_1、工程 B で失敗する確率は p_2，検査 C で誤判定する確率（成功した製品を失敗と判定、またはその逆）は p_3 である時,

A. 製品の製造に失敗する確率を答えよ．

B. 製品を成功と判定する確率を答えよ．(2011 第 1 回 4 日目)

(28) 確率密度関数 $f(X) = A\cos(X)$ が範囲 $[\frac{-\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2}]$ で定義されるとき，A の値と期待値 $E(X)$ を求めよ．(2011 第 1 回 3 日目)

(注意とお願い)

この問題集は色々な所から得た情報をまとめたものです．問題がこの通りに出たという保証は全くありません．自己責任でご利用ください．